Caso, intelligenza e decisioni razionali

Anna Torre

San Pellegrino Terme 8 settembre 2009

UN PO' DI STORIA

UN PO' DI STORIA

- La teoria dei giochi è una disciplina matematica molto recente. La sua nascita viene convenzionalmente fissata con l'uscita del libro di von Neumann e Morgenstern "Theory of Games and Economic Behavior"(Princeton, 1944));

UN PO' DI STORIA

- La teoria dei giochi è una disciplina matematica molto recente. La sua nascita viene convenzionalmente fissata con l'uscita del libro di von Neumann e Morgenstern "Theory of Games and Economic Behavior"(Princeton, 1944));
- Prima del 1944 ci siano stati altri importanti contributi allo studio matematico dei giochi, ma il libro di von Neumann e Morgenstern è il primo a proporre questo programma in maniera sistematica e in relazione allo studio delle scienze sociali. ;

UN PO' DI STORIA

UN PO' DI STORIA

- Dalla fine del settecento c'era il progetto di estendere ad altri campi del sapere il metodo matematico che aveva rivoluzionato lo studio della fisica.

UN PO' DI STORIA

- Dalla fine del settecento c'era il progetto di estendere ad altri campi del sapere il metodo matematico che aveva rivoluzionato lo studio della fisica.
- I tentativi fatti erano però volti a riproporre un modello molto simile a quello della fisica matematica.

UN PO' DI STORIA

- Dalla fine del settecento c'era il progetto di estendere ad altri campi del sapere il metodo matematico che aveva rivoluzionato lo studio della fisica.
- I tentativi fatti erano però volti a riproporre un modello molto simile a quello della fisica matematica.
- Nella prima parte del libro di von Neumann e Morgenstern è presente una critica radicale alla teoria walrasiana dell'equilibrio economico generale, rea, secondo gli autori, di non tenere in considerazione l'influsso che le interazioni con gli altri individui hanno sulle decisioni di ogni singolo individuo.

UN PO' DI STORIA

UN PO' DI STORIA

- La vera rivoluzione non è usare i metodi matematici utili per lo studio della fisica applicandoli all'economia, ma costruire una "matematica nuova", che fornisca uno strumento adatto allo studio di questi argomenti: la teoria dei giochi.

UN PO' DI STORIA

- La vera rivoluzione non è usare i metodi matematici utili per lo studio della fisica applicandoli all'economia, ma costruire una "matematica nuova", che fornisca uno strumento adatto allo studio di questi argomenti: la teoria dei giochi.
- Un altro consistente impulso dato alla modellizzazione dei fenomeni economici fu dato da Harsanyi che propose un modello per descrivere e analizzare le situazioni di incompletezza informativa (1967-68): ad esempio quando un giocatore non conosce esattamente la scala di priorità degli altri.

DI COSA CI OCCUPIAMO

DI COSA CI OCCUPIAMO

La TdG o “Teoria delle decisioni interattive” si occupa delle situazioni in cui nel processo decisionale:

DI COSA CI OCCUPIAMO

La TdG o “Teoria delle decisioni interattive” si occupa delle situazioni in cui nel processo decisionale:

- interviene più di un decisore,

DI COSA CI OCCUPIAMO

La TdG o “Teoria delle decisioni interattive” si occupa delle situazioni in cui nel processo decisionale:

- interviene più di un decisore,
- ogni decisore detiene solo un controllo parziale,

DI COSA CI OCCUPIAMO

La TdG o “Teoria delle decisioni interattive” si occupa delle situazioni in cui nel processo decisionale:

- interviene più di un decisore,
- ogni decisore detiene solo un controllo parziale,
- i decisori hanno preferenze non necessariamente uguali sugli esiti.

ASSUNZIONI

ASSUNZIONI

Si assume solitamente che i decisori:

- conoscano la situazione di interazione (conoscenza comune),

ASSUNZIONI

Si assume solitamente che i decisori:

- conoscano la situazione di interazione (conoscenza comune),
- possano scegliere tra diversi corsi d'azione,

ASSUNZIONI

Si assume solitamente che i decisori:

- conoscano la situazione di interazione (conoscenza comune),
- possano scegliere tra diversi corsi d'azione,
- siano intelligenti (molto intelligenti e senza limiti alle loro capacità di calcolo o deduzione).

APPLICAZIONI

APPLICAZIONI

Oggi la teoria dei giochi ha moltissimi variegati campi di applicazione.
Alcuni esempi:

- Il problema di scegliere adeguati meccanismi d'asta:

APPLICAZIONI

Oggi la teoria dei giochi ha moltissimi variegati campi di applicazione. Alcuni esempi:

- Il problema di scegliere adeguati meccanismi d'asta: clamorosi successi sono stati ottenuti in U.S.A. per l'allocazione di banda da dedicare ai cellulari di seconda generazione e in G.B. per quelli di terza generazione (UMTS);

APPLICAZIONI

Oggi la teoria dei giochi ha moltissimi variegati campi di applicazione. Alcuni esempi:

- Il problema di scegliere adeguati meccanismi d'asta: clamorosi successi sono stati ottenuti in U.S.A. per l'allocazione di banda da dedicare ai cellulari di seconda generazione e in G.B. per quelli di terza generazione (UMTS);
- La modellizzazione delle asimmetrie informative e dei vincoli che queste impongono e di come si possono almeno parzialmente affrontare;

APPLICAZIONI

Oggi la teoria dei giochi ha moltissimi variegati campi di applicazione. Alcuni esempi:

- Il problema di scegliere adeguati meccanismi d'asta: clamorosi successi sono stati ottenuti in U.S.A. per l'allocazione di banda da dedicare ai cellulari di seconda generazione e in G.B. per quelli di terza generazione (UMTS);
- La modellizzazione delle asimmetrie informative e dei vincoli che queste impongono e di come si possono almeno parzialmente affrontare;
- La teoria dei giochi evolutivi che ha una buona capacità di comprendere comportamenti animali;

APPLICAZIONI

Oggi la teoria dei giochi ha moltissimi variegati campi di applicazione. Alcuni esempi:

- Il problema di scegliere adeguati meccanismi d'asta: clamorosi successi sono stati ottenuti in U.S.A. per l'allocazione di banda da dedicare ai cellulari di seconda generazione e in G.B. per quelli di terza generazione (UMTS);
- La modellizzazione delle asimmetrie informative e dei vincoli che queste impongono e di come si possono almeno parzialmente affrontare;
- La teoria dei giochi evolutivi che ha una buona capacità di comprendere comportamenti animali;
- In Microbiologia: lo studio della rilevanza di alcuni geni nella insorgenza di specifiche malattie;

APPLICAZIONI

Oggi la teoria dei giochi ha moltissimi variegati campi di applicazione. Alcuni esempi:

- Il problema di scegliere adeguati meccanismi d'asta: clamorosi successi sono stati ottenuti in U.S.A. per l'allocazione di banda da dedicare ai cellulari di seconda generazione e in G.B. per quelli di terza generazione (UMTS);
- La modellizzazione delle asimmetrie informative e dei vincoli che queste impongono e di come si possono almeno parzialmente affrontare;
- La teoria dei giochi evolutivi che ha una buona capacità di comprendere comportamenti animali;
- In Microbiologia: lo studio della rilevanza di alcuni geni nella insorgenza di specifiche malattie;
- In Medicina: come organizzare un sistema di scambi di reni (cross-over) per i trapianti.

GIOCHI

GIOCHI

Una prima distinzione nell'ambito della teoria dei giochi è data dal contesto istituzionale nel quale ci si muove:

- Si parla di giochi cooperativi se sono ammessi accordi vincolanti;

GIOCHI

Una prima distinzione nell'ambito della teoria dei giochi è data dal contesto istituzionale nel quale ci si muove:

- Si parla di giochi cooperativi se sono ammessi accordi vincolanti;
- Si parla di giochi non cooperativi se sono ammessi accordi vincolanti.

GIOCHI

Una prima distinzione nell'ambito della teoria dei giochi è data dal contesto istituzionale nel quale ci si muove:

- Si parla di giochi cooperativi se sono ammessi accordi vincolanti;
- Si parla di giochi non cooperativi se sono ammessi accordi vincolanti.

Vorrei analizzare brevemente la prima modellizzazione (von Neumann e Nash) dei giochi non cooperativi a due giocatori in forma strategica.

SOMMA ZERO (Von Neumann)

SOMMA ZERO (Von Neumann)

Consideriamo la seguente matrice:

I/II	L	R
T	4,-4	1,-1
B	3,-3	2,-2

Ragionamenti del giocatore I:

SOMMA ZERO (Von Neumann)

Consideriamo la seguente matrice:

I/II	L	R
T	4,-4	1,-1
B	3,-3	2,-2

Ragionamenti del giocatore I:

- se II gioca L a me conviene giocare T,

SOMMA ZERO (Von Neumann)

Consideriamo la seguente matrice:

I/II	L	R
T	4,-4	1,-1
B	3,-3	2,-2

Ragionamenti del giocatore I:

- se II gioca L a me conviene giocare T,
- se io gioco T a II conviene giocare R,

SOMMA ZERO (Von Neumann)

Consideriamo la seguente matrice:

I/II	L	R
T	4,-4	1,-1
B	3,-3	2,-2

Ragionamenti del giocatore I:

- se II gioca L a me conviene giocare T,
- se io gioco T a II conviene giocare R,
- se II gioca R a me conviene giocare B,

SOMMA ZERO (Von Neumann)

Consideriamo la seguente matrice:

I/II	L	R
T	4,-4	1,-1
B	3,-3	2,-2

Ragionamenti del giocatore I:

- se II gioca L a me conviene giocare T,
- se io gioco T a II conviene giocare R,
- se II gioca R a me conviene giocare B,
- se io gioco B a II conviene giocare R,

SOMMA ZERO (Von Neumann)

Consideriamo la seguente matrice:

I/II	L	R
T	4,-4	1,-1
B	3,-3	2,-2

Ragionamenti del giocatore I:

- se II gioca L a me conviene giocare T,
- se io gioco T a II conviene giocare R,
- se II gioca R a me conviene giocare B,
- se io gioco B a II conviene giocare R,
- se II gioca R a me conviene giocare B.

SOMMA ZERO (Von Neumann)

Consideriamo la seguente matrice:

I/II	L	R
T	4,-4	1,-1
B	3,-3	2,-2

Ragionamenti del giocatore I:

- se II gioca L a me conviene giocare T,
- se io gioco T a II conviene giocare R,
- se II gioca R a me conviene giocare B,
- se io gioco B a II conviene giocare R,
- se II gioca R a me conviene giocare B.

(B, R) è un equilibrio.

I/II	L	R	min	
T	4	1	1	
B	3	2	2	

I/II	L	R	min	
T	4	1	1	
B	3	2	2	max dei min =2

I/II	L	R	min	
T	4	1	1	
B	3	2	2	max dei min =2
max	4,	2		

I/II	L	R	min	
T	4	1	1	
B	3	2	2	max dei min =2
max	4,	2		
			min dei max=2	

I/II	L	R	min	
T	4	1	1	
B	3	2	2	max dei min =2
max	4,	2		
			min dei max=2	

Il min dei max sulle colonne è uguale al max dei min sulle righe!

I/II	L	R	min	
T	4	1	1	
B	3	2	2	max dei min =2
max	4,	2		
			min dei max=2	

Il min dei max sulle colonne è uguale al max dei min sulle righe!

Se un gioco a somma zero ha un equilibrio, le strategie componenti sono di maxmin=minmax.

PROBLEMI

PROBLEMI

Due problemi:

PROBLEMI

Due problemi:

In generale non è vero che maxmin=minmax: esempio (pari o dispari)

PROBLEMI

Due problemi:

In generale non è vero che maxmin=minmax: esempio (pari o dispari)

I/II	L	R
T	-1,1	1,-1
B	1,-1	-1,1

PROBLEMI

Due problemi:

In generale non è vero che maxmin=minmax: esempio (pari o dispari)

I/II	L	R
T	-1,1	1,-1
B	1,-1	-1,1

Qui $minmax = 1$ e $maxmin = -1$:

PROBLEMI

Due problemi:

In generale non è vero che maxmin=minmax: esempio (pari o dispari)

I/II	L	R
T	-1,1	1,-1
B	1,-1	-1,1

Qui $minmax = 1$ e $maxmin = -1$:

la risposta è data da Von Neumann.

PROBLEMI

Due problemi:

In generale non è vero che maxmin=minmax: esempio (pari o dispari)

I/II	L	R
T	-1,1	1,-1
B	1,-1	-1,1

Qui $minmax = 1$ e $maxmin = -1$:

la risposta è data da Von Neumann.

Secondo problema: i giochi non sono sempre a somma zero:

PROBLEMI

Due problemi:

In generale non è vero che maxmin=minmax: esempio (pari o dispari)

I/II	L	R
T	-1,1	1,-1
B	1,-1	-1,1

Qui $minmax = 1$ e $maxmin = -1$:

la risposta è data da Von Neumann.

Secondo problema: i giochi non sono sempre a somma zero:

La risposta è data da Nash.

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

I/II	L	R
T	5,5	0,6
B	6,0	1,1

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

I/II	L	R
T	5,5	0,6
B	6,0	1,1

Osserviamo il gioco dal punto di vista di ciascun giocatore:

I/II	L	R
T	5,	0
B	6	1

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

I/II	L	R
T	5,5	0,6
B	6,0	1,1

Osserviamo il gioco dal punto di vista di ciascun giocatore:

I/II	L	R
T	5,	0
B	6	1

I/II	L	R
T	5	6
B	0	1

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

I/II	L	R
T	5,5	0,6
B	6,0	1,1

Osserviamo il gioco dal punto di vista di ciascun giocatore:

I/II	L	R
T	5,	0
B	6	1

I/II	L	R
T	5	6
B	0	1

La soluzione è: i giocatori giocano il primo B e il secondo R e prendono 1 ciascuno, ma il risultato è inefficiente.

ESEMPI DI SITUAZIONI IN CUI LA SOLUZIONE NON COOPERATIVA È INEFFICIENTE

ESEMPI DI SITUAZIONI IN CUI LA SOLUZIONE NON COOPERATIVA È INEFFICIENTE

- la tragedia dei commons

ESEMPI DI SITUAZIONI IN CUI LA SOLUZIONE NON COOPERATIVA È INEFFICIENTE

- la tragedia dei commons
- la raccolta differenziata

ESEMPI DI SITUAZIONI IN CUI LA SOLUZIONE NON COOPERATIVA È INEFFICIENTE

- la tragedia dei commons
- la raccolta differenziata
- Il protocollo di Kyoto

ESEMPI DI SITUAZIONI IN CUI LA SOLUZIONE NON COOPERATIVA È INEFFICIENTE

- la tragedia dei commons
- la raccolta differenziata
- Il protocollo di Kyoto
- le cartacce per terra

ESEMPI DI SITUAZIONI IN CUI LA SOLUZIONE NON COOPERATIVA È INEFFICIENTE

- la tragedia dei commons
- la raccolta differenziata
- Il protocollo di Kyoto
- le cartacce per terra
- lo spam in internet

ESEMPI DI SITUAZIONI IN CUI LA SOLUZIONE NON COOPERATIVA È INEFFICIENTE

- la tragedia dei commons
- la raccolta differenziata
- Il protocollo di Kyoto
- le cartacce per terra
- lo spam in internet

EQUILIBRIO DI NASH

L'idea di Nash è proprio questa:

Il risultato del gioco dipende da quello che fanno entrambi i giocatori, ma se I sa cosa fa II, allora il risultato dipende solo da lui e simmetricamente per II

EQUILIBRIO DI NASH

L'idea di Nash è proprio questa:

Il risultato del gioco dipende da quello che fanno entrambi i giocatori, ma se I sa cosa fa II, allora il risultato dipende solo da lui e simmetricamente per II

Una coppia di strategie è un equilibrio di Nash se nessuno dei due giocatori ha interesse a deviare unilateralmente.

EQUILIBRIO DI NASH

EQUILIBRIO DI NASH

Consideriamo il gioco:

$(X,\ Y,\ f,\ g:\ X \times Y \to \mathbf{R})$

dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice **equilibrio di Nash** se

EQUILIBRIO DI NASH

Consideriamo il gioco:

$(X,\ Y,\ f,\ g:\ X \times Y \to \mathbf{R})$

dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice **equilibrio di Nash** se

[1] $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$

EQUILIBRIO DI NASH

Consideriamo il gioco:

$(X,\ Y,\ f,\ g:\ X \times Y \to \mathbf{R})$

dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice **equilibrio di Nash** se

[1] $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$

[2] $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$

EQUILIBRIO DI NASH

Consideriamo il gioco:

$(X,\ Y,\ f,\ g:\ X \times Y \to \mathbf{R})$

dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice **equilibrio di Nash** se

[1] $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$

[2] $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$

Nel caso del dilemma del prigioniero la soluzione non è solo un equilibrio di Nash ma è anche ottenuta per eliminazione di strategie dominate.

STRATEGIE CONSERVATIVE

STRATEGIE CONSERVATIVE

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_2	5	2	-2
s_3	9	-1	3

STRATEGIE CONSERVATIVE

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_2	5	2	-2
s_3	9	-1	3

- Cosa può fare il primo giocatore se è “pessimista”: nel caso dei giochi a somma zero ha senso esserlo;

STRATEGIE CONSERVATIVE

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_2	5	2	-2
s_3	9	-1	3

- Cosa può fare il primo giocatore se è “pessimista”: nel caso dei giochi a somma zero ha senso esserlo;
- Il giocatore I si chiede in ciascuna riga cosa è il peggio che gli può capitare e lo massimizza, cerca la sua strategia di maxmin, che in questo caso è s_1 e il valore del maxmin è 3.

STRATEGIE CONSERVATIVE

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_2	5	2	-2
s_3	9	-1	3

- Cosa può fare il primo giocatore se è “pessimista”: nel caso dei giochi a somma zero ha senso esserlo;
- Il giocatore I si chiede in ciascuna riga cosa è il peggio che gli può capitare e lo massimizza, cerca la sua strategia di maxmin, che in questo caso è s_1 e il valore del maxmin è 3.
- Il giocatore II si chiede in ciascuna colonna cosa è il peggio che gli può capitare e lo minimizza, cioè cerca la sua strategia di minmax, che in questo caso è t_2 e il valore del minmax è 3.

STRATEGIE CONSERVATIVE

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_2	5	2	-2
s_3	9	-1	3

- Cosa può fare il primo giocatore se è “pessimista”: nel caso dei giochi a somma zero ha senso esserlo;
- Il giocatore I si chiede in ciascuna riga cosa è il peggio che gli può capitare e lo massimizza, cerca la sua strategia di maxmin, che in questo caso è s_1 e il valore del maxmin è 3.
- Il giocatore II si chiede in ciascuna colonna cosa è il peggio che gli può capitare e lo minimizza, cioè cerca la sua strategia di minmax, che in questo caso è t_2 e il valore del minmax è 3.
- Il risultato è che II paga 3 a I: qui il minmax coincide con il maxmin la soluzione è ragionevole.

STRATEGIE CONSERVATIVE

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_2	5	2	-2
s_3	9	-1	3

- Cosa può fare il primo giocatore se è “pessimista”: nel caso dei giochi a somma zero ha senso esserlo;
- Il giocatore I si chiede in ciascuna riga cosa è il peggio che gli può capitare e lo massimizza, cerca la sua strategia di maxmin, che in questo caso è s_1 e il valore del maxmin è 3.
- Il giocatore II si chiede in ciascuna colonna cosa è il peggio che gli può capitare e lo minimizza, cioè cerca la sua strategia di minmax, che in questo caso è t_2 e il valore del minmax è 3.
- Il risultato è che II paga 3 a I: qui il minmax coincide con il maxmin la soluzione è ragionevole.

PARI O DISPARI

PARI O DISPARI

Purtroppo però in generale il minmax non coincide con il maxmin.

PARI O DISPARI

Purtroppo però in generale il minmax non coincide con il maxmin.

I/II	L	R
T	-1,1,	1,-1
B	1,-1	-1,1

PARI O DISPARI

Purtroppo però in generale il minmax non coincide con il maxmin.

I/II	L	R
T	-1,1,	1,-1
B	1,-1	-1,1

Non possiede equilibri di Nash e nemmeno maxmin.(provare per credere!)

PARI O DISPARI

Purtroppo però in generale il minmax non coincide con il maxmin.

I/II	L	R
T	-1,1,	1,-1
B	1,-1	-1,1

Non possiede equilibri di Nash e nemmeno maxmin.(provare per credere!)

Questo è un gioco "apparentemente" senza soluzione.

PARI O DISPARI

Purtroppo però in generale il minmax non coincide con il maxmin.

I/II	L	R
T	-1,1,	1,-1
B	1,-1	-1,1

Non possiede equilibri di Nash e nemmeno maxmin.(provare per credere!)

Questo è un gioco "apparentemente" senza soluzione.

(È senza soluzione sia nel senso del maxmin che nel senso dell'equilibrio di Nash) se ci limitiamo alle strategie che abbiamo scritto.

STRATEGIE MISTE

		q	$1-q$
	I/II	L	R
p	T	-1,1,	1,-1
$1-p$	B	-1,1	1,-1

STRATEGIE MISTE

		q	$1-q$
	I/II	L	R
p	T	-1,1,	1,-1
$1-p$	B	-1,1	1,-1

Il giocatore I invece di fare una scelta per così dire “secca”, può scegliere di giocare la strategia T con probabilità p e la strategia B con probabilità $1-p$. Analogamente il giocatore II.

STRATEGIE MISTE

		q	$1-q$
	I/II	L	R
p	T	-1,1,	1,-1
$1-p$	B	-1,1	1,-1

Il giocatore I invece di fare una scelta per così dire “secca”, può scegliere di giocare la strategia T con probabilità p e la strategia B con probabilità $1-p$. Analogamente il giocatore II.
Abbiamo introdotto la cosidetta “estensione mista del gioco”.

STRATEGIE MISTE

STRATEGIE MISTE

Vediamo cosa succede se pensiamo a questo spazio di strategie più grande.

STRATEGIE MISTE

Vediamo cosa succede se pensiamo a questo spazio di strategie più grande.

- Una distribuzione di probabilità nel caso di due strategie è la scelta di un numero nell'intervallo $[0, 1]$.

STRATEGIE MISTE

Vediamo cosa succede se pensiamo a questo spazio di strategie più grande.

- Una distribuzione di probabilità nel caso di due strategie è la scelta di un numero nell'intervallo $[0, 1]$.
- Abbiamo cambiato lo spazio delle strategie, facendolo diventare molto più grande.

STRATEGIE MISTE

Vediamo cosa succede se pensiamo a questo spazio di strategie più grande.

- Una distribuzione di probabilità nel caso di due strategie è la scelta di un numero nell'intervallo $[0, 1]$.
- Abbiamo cambiato lo spazio delle strategie, facendolo diventare molto più grande.
- Una strategia per il primo giocatore è adesso rappresentata da un numero p compreso tra 0 e 1, mentre una strategia per il secondo da un numero q compreso tra 0 e 1.

STRATEGIE MISTE

Vediamo cosa succede se pensiamo a questo spazio di strategie più grande.

- Una distribuzione di probabilità nel caso di due strategie è la scelta di un numero nell'intervallo $[0, 1]$.
- Abbiamo cambiato lo spazio delle strategie, facendolo diventare molto più grande.
- Una strategia per il primo giocatore è adesso rappresentata da un numero p compreso tra 0 e 1, mentre una strategia per il secondo da un numero q compreso tra 0 e 1.
- Come calcoliamo il payoff dei giocatori in corrispondenza ai valori p e q delle strategie?

STRATEGIE MISTE

Vediamo cosa succede se pensiamo a questo spazio di strategie più grande.

- Una distribuzione di probabilità nel caso di due strategie è la scelta di un numero nell'intervallo $[0, 1]$.
- Abbiamo cambiato lo spazio delle strategie, facendolo diventare molto più grande.
- Una strategia per il primo giocatore è adesso rappresentata da un numero p compreso tra 0 e 1, mentre una strategia per il secondo da un numero q compreso tra 0 e 1.
- Come calcoliamo il payoff dei giocatori in corrispondenza ai valori p e q delle strategie?
- Semplicemente calcoliamo il payoff atteso, supponendo che i due agiscano indipendentemente.

STRATEGIE MISTE

		q	$1-q$
	I/II	L	R
p	T	$pq(-1)$	$p(1-q)(1)$
$1-p$	B	$(1-p)q(1)$	$(1-p)(1-q)(-1)$

STRATEGIE MISTE

		q	$1-q$
	I/II	L	R
p	T	$pq(-1)$	$p(1-q)(1)$
$1-p$	B	$(1-p)q(1)$	$(1-p)(1-q)(-1)$

che nel nostro caso per il primo giocatore è:

$$f(p,q) = pq\cdot(-1)+p(1-q)\cdot(+1)+q(1-p)\cdot(+1)+(1-p)(1-q)\cdot(-1) =$$
$$(-4pq+2p+2q-1 = (-4q+2)p+2q-1$$

STRATEGIE MISTE

		q	$1-q$
	I/II	L	R
p	T	$pq(-1)$	$p(1-q)(1)$
$1-p$	B	$(1-p)q(1)$	$(1-p)(1-q)(-1)$

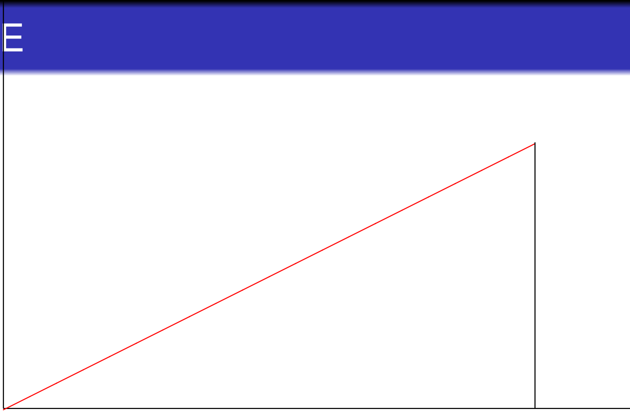
che nel nostro caso per il primo giocatore è:

$$f(p,q) = pq\cdot(-1)+p(1-q)\cdot(+1)+q(1-p)\cdot(+1)+(1-p)(1-q)\cdot(-1) =$$

$$(-4pq+2p+2q-1 = (-4q+2)p+2q-1$$

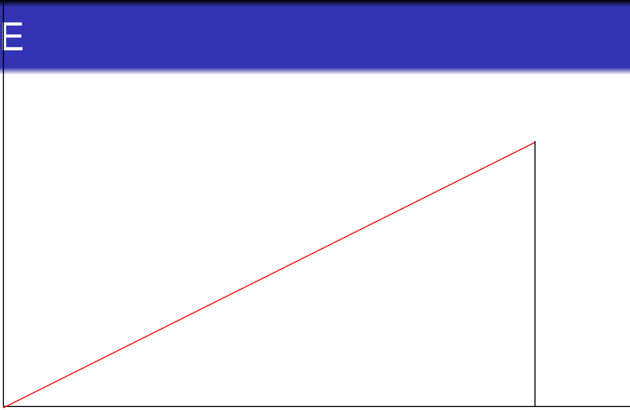
Naturalmente il payoff atteso del secondo è il suo opposto.

STRATEGIE MISTE



$$max\ p = 1$$

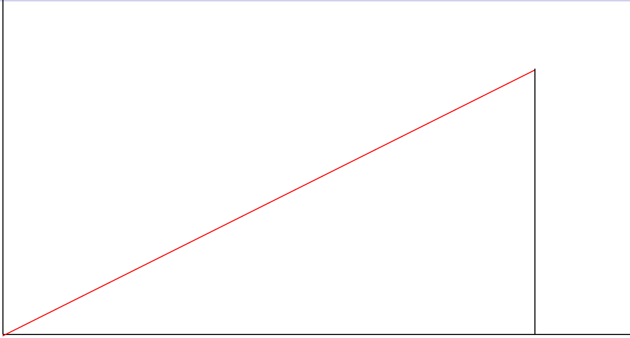
STRATEGIE MISTE



$f(p,q) = (-4q+2)p + 2q - 1$ per
$-4q+2 > 0$ cioè
$q < \frac{1}{2}$

$max\ p = 1$

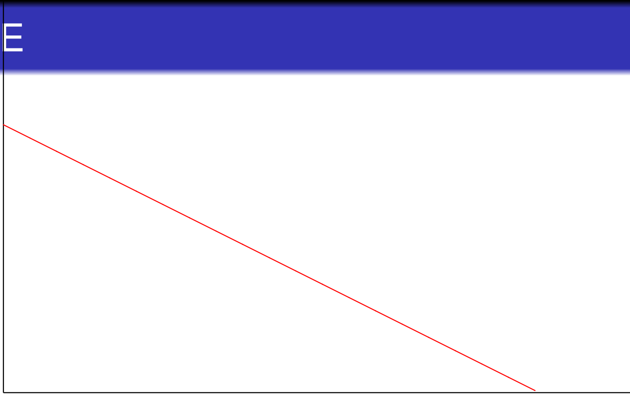
STRATEGIE MISTE



$max\ p = 1$

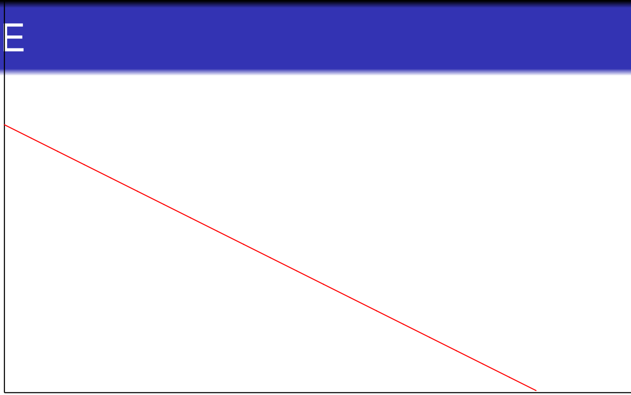
$f(p,q) = (-4q+2)p + 2q - 1$ per
$-4q + 2 > 0$ cioè
$q < \frac{1}{2}$
il massimo si ha per $p = 1$.

STRATEGIE MISTE



$max\ p = 0$

STRATEGIE MISTE

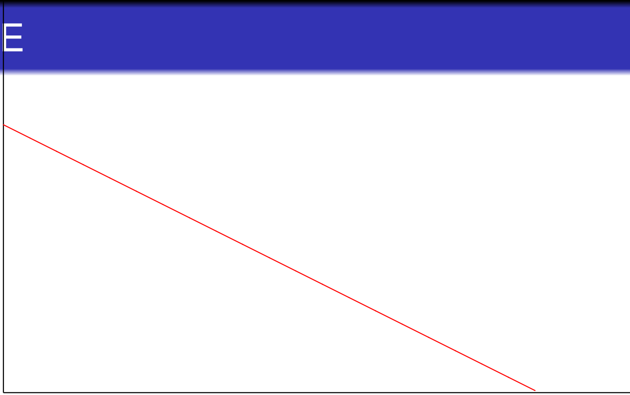


$$max\ p = 0$$

$f(p, q) = (-4q + 2)p + 2q - 1$ per

$-4q + 2 < 0$ cioè

$q > \frac{1}{2}$



$$max\ p = 0$$

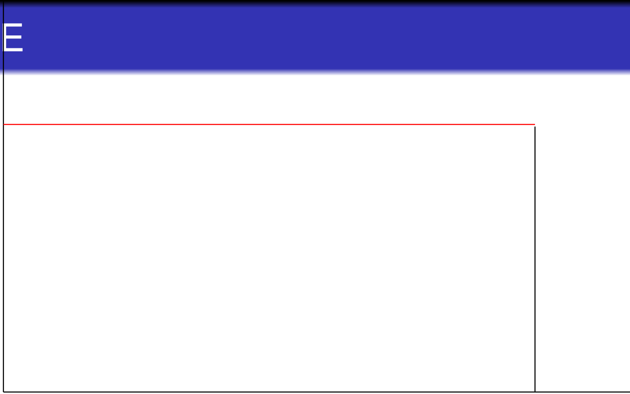
$f(p,q) = (-4q+2)p + 2q - 1$ per

$-4q + 2 < 0$ cioè

$q > \frac{1}{2}$

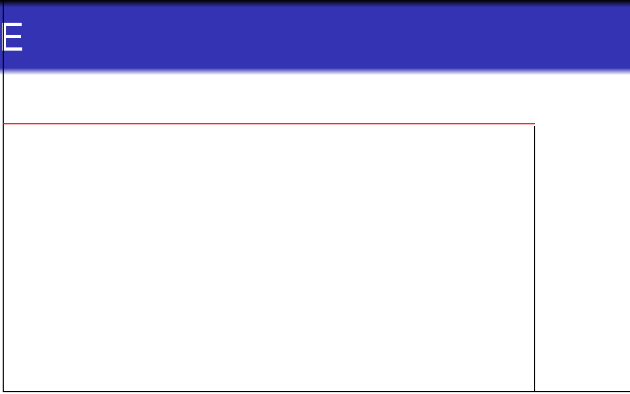
il massimo si ha per $p = 0$.

STRATEGIE MISTE



$max \forall p$

STRATEGIE MISTE



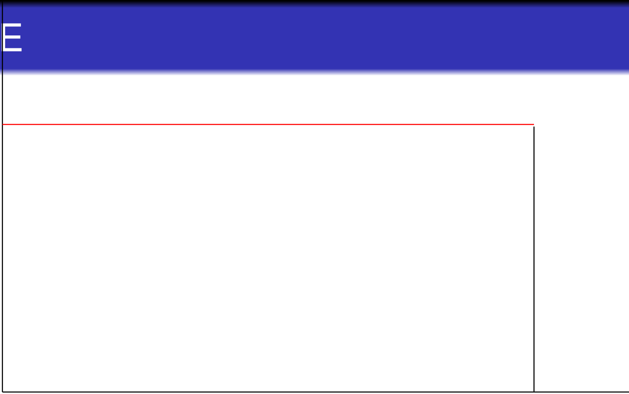
$max \forall p$

$f(p,q) = (-4q+2)p + 2q - 1$ per

$-4q + 2 = 0$ cioè

$q = \frac{1}{2}$

STRATEGIE MISTE



$max \forall p$

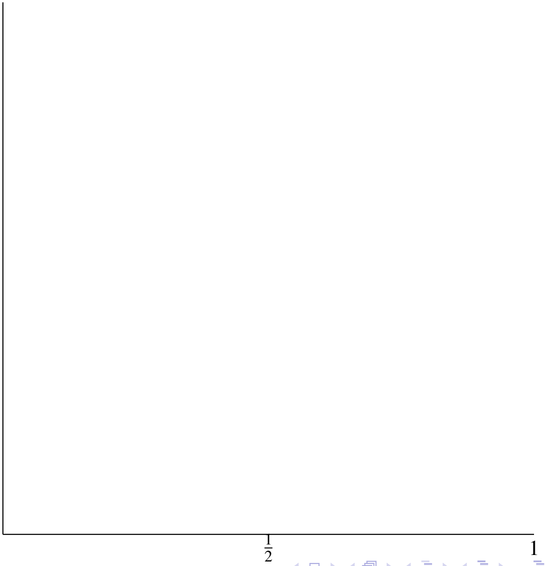
$f(p,q) = (-4q+2)p + 2q - 1$ per

$-4q + 2 = 0$ cioè

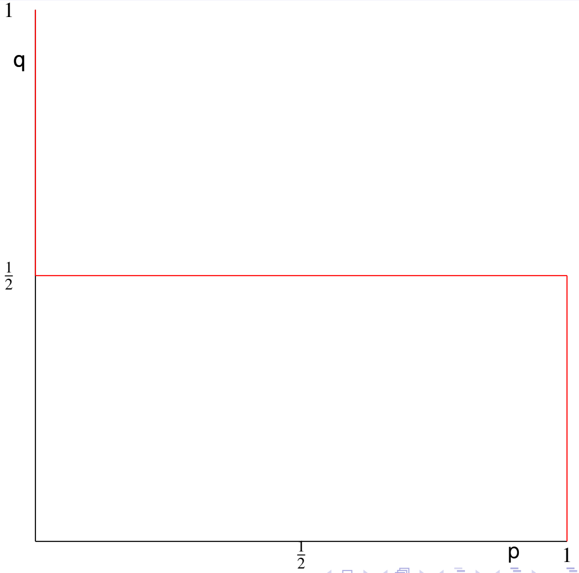
$q = \frac{1}{2}$

il massimo si ha per per ogni p.

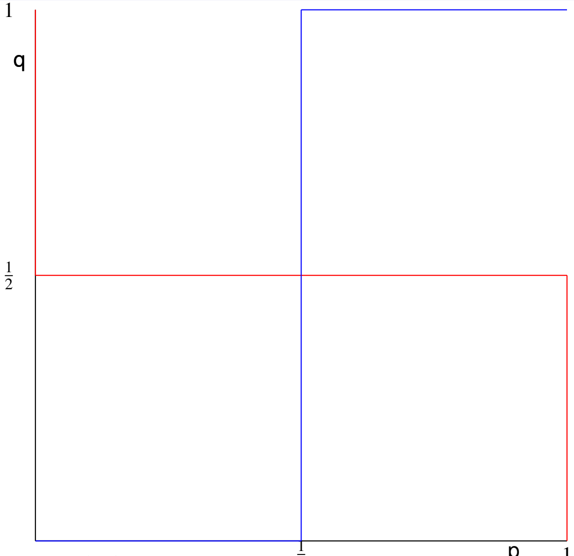
STRATEGIE MISTE



STRATEGIE MISTE



STRATEGIE MISTE



Nel punto di intersezione $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, p è miglior risposta a q e viceversa.

Se cerchiamo le strategie in cui il maxmin coincide con il minmax troviamo la stessa cosa.

- Gli spazi di strategie sono infiniti, quindi se vogliamo trovare il *maxmin* e il *minmax* adesso lo dobbiamo cercare sull'insieme delle distribuzioni di probabilità sull'insieme delle strategie pure, che è un insieme infinito

Se cerchiamo le strategie in cui il maxmin coincide con il minmax troviamo la stessa cosa.

- Gli spazi di strategie sono infiniti, quindi se vogliamo trovare il *maxmin* e il *minmax* adesso lo dobbiamo cercare sull'insieme delle distribuzioni di probabilità sull'insieme delle strategie pure, che è un insieme infinito
- Per il primo giocatore cerchiamo $max_p min_q f(p,q) = max_p((-4p+2)q + 2p - 1)$. Si vede facilmente che questo valore è 0 e viene realizzato per $\bar{p} = \frac{1}{2}$ Analogamente il *minmax* vale 0 e viene realizzato per $\bar{q} = \frac{1}{2}$.
- In questo caso si vede facilmente che $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ sono soluzione del problema.

Se cerchiamo le strategie in cui il maxmin coincide con il minmax troviamo la stessa cosa.

- Gli spazi di strategie sono infiniti, quindi se vogliamo trovare il $maxmin$ e il $minmax$ adesso lo dobbiamo cercare sull'insieme delle distribuzioni di probabilità sull'insieme delle strategie pure, che è un insieme infinito
- Per il primo giocatore cerchiamo $max_p min_q f(p,q) = max_p((-4p+2)q+2p-1)$. Si vede facilmente che questo valore è 0 e viene realizzato per $\bar{p} = \frac{1}{2}$ Analogamente il $minmax$ vale 0 e viene realizzato per $\bar{q} = \frac{1}{2}$.
- In questo caso si vede facilmente che $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ sono soluzione del problema. Data la simmetria del gioco, potevamo aspettarci la simmetria della soluzione: in questo ambito più generale la soluzione di $maxmin = minmax$ sta nel giocare con uguale probabilità la prima e la seconda strategia per entrambi i giocatori.

Se cerchiamo le strategie in cui il maxmin coincide con il minmax troviamo la stessa cosa.

- Gli spazi di strategie sono infiniti, quindi se vogliamo trovare il *maxmin* e il *minmax* adesso lo dobbiamo cercare sull'insieme delle distribuzioni di probabilità sull'insieme delle strategie pure, che è un insieme infinito
- Per il primo giocatore cerchiamo $max_p min_q f(p, q) = max_p((-4p + 2)q + 2p - 1)$. Si vede facilmente che questo valore è 0 e viene realizzato per $\bar{p} = \frac{1}{2}$ Analogamente il *minmax* vale 0 e viene realizzato per $\bar{q} = \frac{1}{2}$.
- In questo caso si vede facilmente che $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ sono soluzione del problema. Data la simmetria del gioco, potevamo aspettarci la simmetria della soluzione: in questo ambito più generale la soluzione di $maxmin = minmax$ sta nel giocare con uguale probabilità la prima e la seconda strategia per entrambi i giocatori.
- In questo modo il valore atteso (0) è meglio del vecchio *maxmin*

I due valori $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ tali che
$f(p,\bar{q}) \leq f(\bar{p},\bar{q}) = max_p min_q f(p,q) = min_q max_p f(p,q) \leq f(p,\bar{q})$
per ogni p e q in [0,1].

I due valori $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ tali che
$f(p,\bar{q}) \leq f(\bar{p},\bar{q}) = max_p min_q f(p,q) = min_q max_p f(p,q) \leq f(p,\bar{q})$
per ogni p e q in [0,1].
Inoltre, se uno dei due giocatori decide di usare questa strategia mista, l'altro non può fare nulla per contrastarlo, perchè qualunque cosa faccia si procura lo stesso o meno.

I due valori $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ tali che
$f(p,\bar{q}) \leq f(\bar{p},\bar{q}) = max_p min_q f(p,q) = min_q max_p f(p,q) \leq f(p,\bar{q})$
per ogni p e q in [0,1].
Inoltre, se uno dei due giocatori decide di usare questa strategia mista, l'altro non può fare nulla per contrastarlo, perchè qualunque cosa faccia si procura lo stesso o meno.
Abbiamo pagato il prezzo di rendere molto più grande lo spazio delle strategie, ma abbiamo trovato una soluzione soddisfacente.

TEOREMI DI ESISTENZA

Teorema di Von Neumann. Se $(X,\ Y,\ f,\ -f)$ è l'estensione mista di un gioco a somma zero finito, allora esiste almeno una coppia di strategie che realizzano il maxmin=minmax.

TEOREMI DI ESISTENZA

Teorema di Von Neumann. Se $(X, Y, f, -f)$ è l'estensione mista di un gioco a somma zero finito, allora esiste almeno una coppia di strategie che realizzano il maxmin=minmax.
Teorema di Nash. Se (X, Y, f, g) è l'estensione mista di un gioco finito, allora esiste almeno una coppia di strategie che realizzano un equilibrio di Nash.

TEOREMI DI ESISTENZA

Teorema di Von Neumann. Se $(X,\ Y,\ f,\ -f)$ è l'estensione mista di un gioco a somma zero finito, allora esiste almeno una coppia di strategie che realizzano il maxmin=minmax.

Teorema di Nash. Se $(X,\ Y,\ f,\ g)$ è l'estensione mista di un gioco finito, allora esiste almeno una coppia di strategie che realizzano un equilibrio di Nash.

Gli equilibri di Nash di un gioco a somma zero sono le coppie di strategie che realizzano il maxmin=minmax

ESEMPIO

ESEMPIO

Vediamo questo gioco:

I/II	L	R
T	-2,2	3,-3
B	3,-3	-4,4

ESEMPIO

Vediamo questo gioco:

I/II	L	R
T	-2,2	3,-3
B	3,-3	-4,4

Facendo i conti si vede che l'equilibrio si ottiene per $p = \frac{7}{12}$ e $q = \frac{7}{12}$ con un guadagno atteso per I uguale a $\frac{1}{12}$.

ESEMPIO

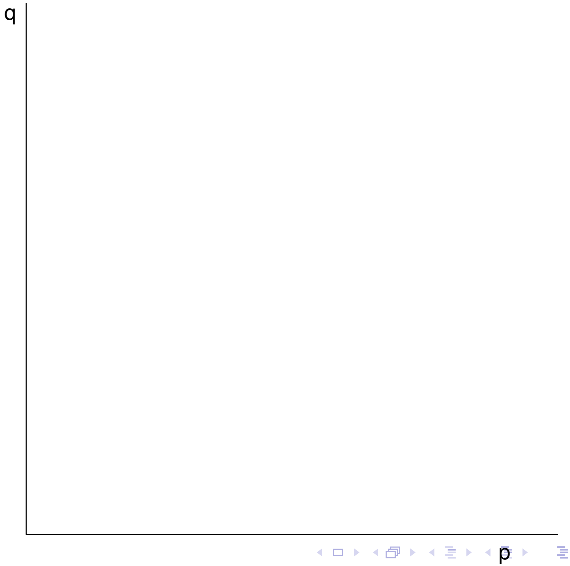
Vediamo questo gioco:

I/II	L	R
T	-2,2	3,-3
B	3,-3	-4,4

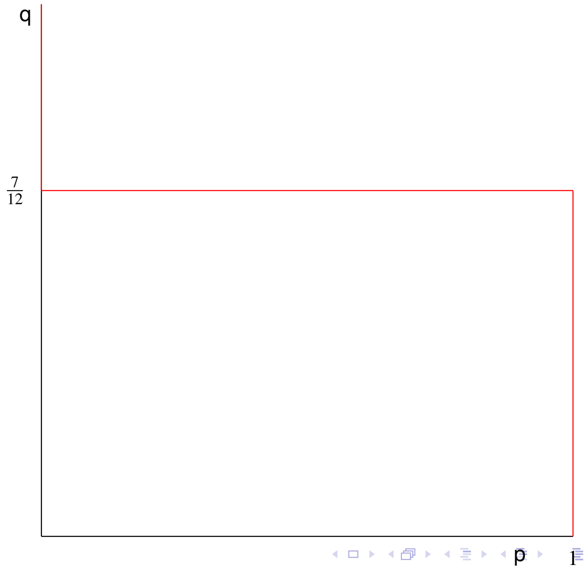
Facendo i conti si vede che l'equilibrio si ottiene per $p = \frac{7}{12}$ e $q = \frac{7}{12}$ con un guadagno atteso per I uguale a $\frac{1}{12}$.
Quindi, questo gioco che a una analisi poco attenta sembra pari, in realtà se entrambi i giocatori giocano al meglio delle loro possibilità dà al primo giocatore un guadagno atteso positivo.

ESEMPIO

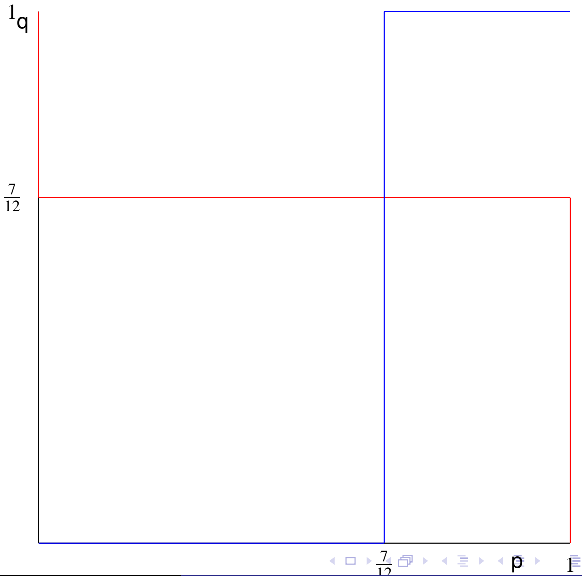
ESEMPIO



ESEMPIO



ESEMPIO



Analogamente il gioco delle cinque dita:

I/II	1	2	3	4	5
1	-1	1	-1	1	-1
2	1	-1	1	-1	1
3	-1	1	-1	1	-1
4	1	-1	1	-1	1
5	-1	1	-1	1	-1

I giocatori (I e II) devono scegliere contemporaneamente e indipendentemente un numero tra 1 e 5. Se la somma dei due numeri è pari, vince II. Altrimenti vince I. Questo gioco apparentemente avvantaggia il giocatore 2 ma l'equilibrio è $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$per il primo giocatore e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ per il secondo con valore atteso 0. Questa è la la differenza tra il trovarsi di fronte al caso o di fronte a un essere intelligente che va a caso "con intelligenza".