Il ruolo dell'incertezza nelle scelte quotidiane:

come scegliere nel modo "migliore"?

M.Bertocchi

Dipartimento di Matematica, Statistica, Informatica
e Applicazioni "l. Mascheroni"

Università degli Studi di Bergamo

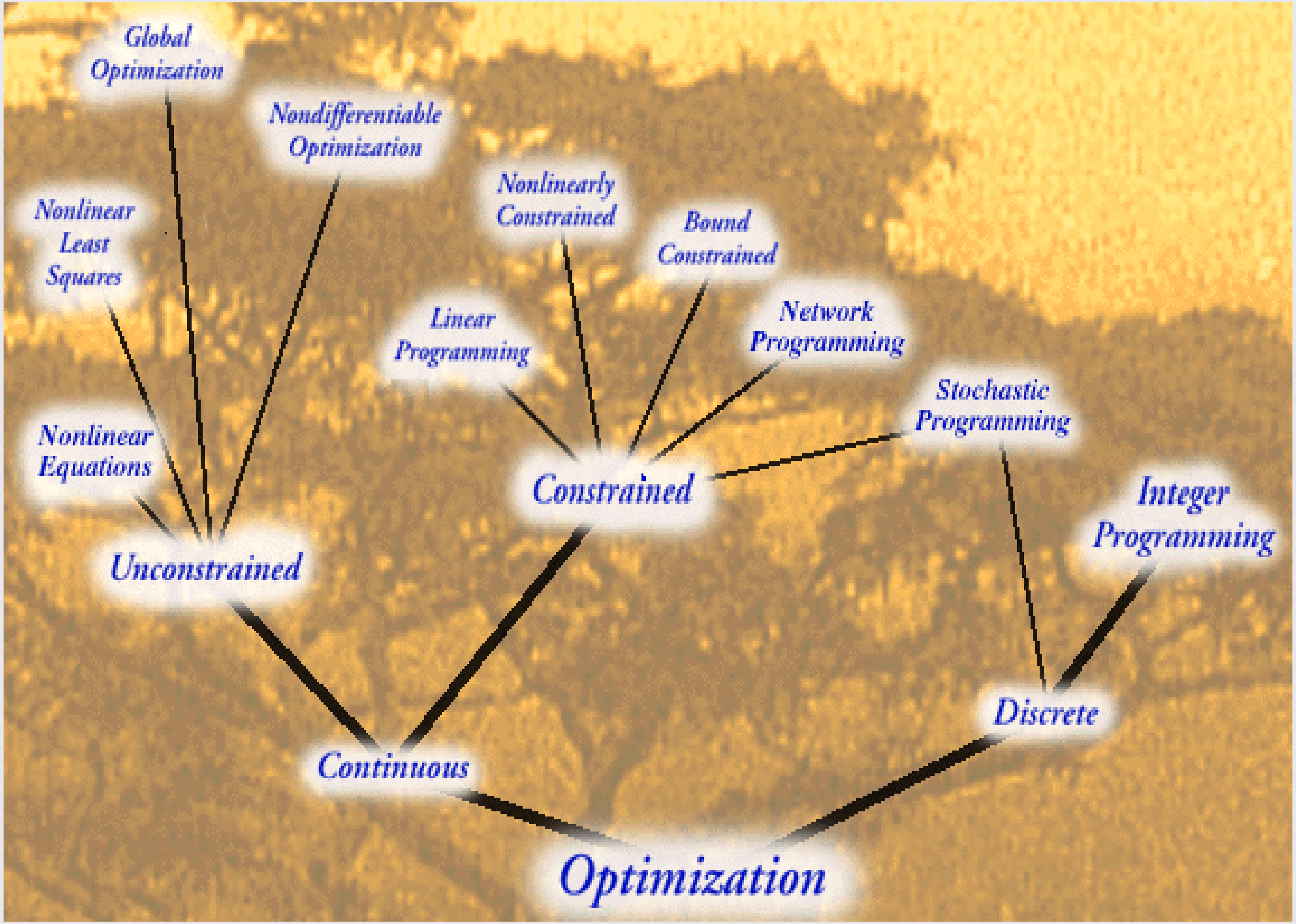
Email: marida.bertocchi@unibg.it

Ci occupiamo di:

ottimizzazione   stocastica.

Alcune domande:

- Cosa significa “ottimizzazione”?
- Cosa significa “stocastico”?


Global Optimization
Nondifferentiable Optimization
Nonlinear Least Squares
Nonlinearly Constrained
Bound Constrained
Linear Programming
Network Programming
Stochastic Programming
Nonlinear Equations
Constrained
Integer Programming
Unconstrained
Discrete
Continuous
Optimization

Due parole chiave

- Deterministico $\approx$ certo
- Stocastico $\approx$ incerto, casuale, aleatorio

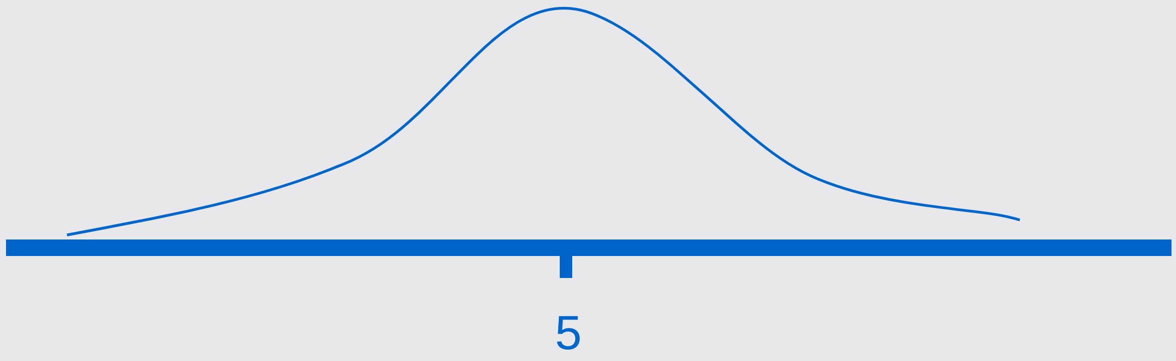
Dati

- Deterministico

    La domanda è: 5

- Aleatorio

    La domanda è data mediante una distribuzione, con una media di 5



Definizione di programmazione stocastica

"The aim of stochastic programming is precisely to find an optimal solution in problems involving uncertain data. In this

terminology, stochastic is opposed to deterministic and means that some data

are random…"

Introduction to Stochastic Programming (1997)

Birge & Louveaux

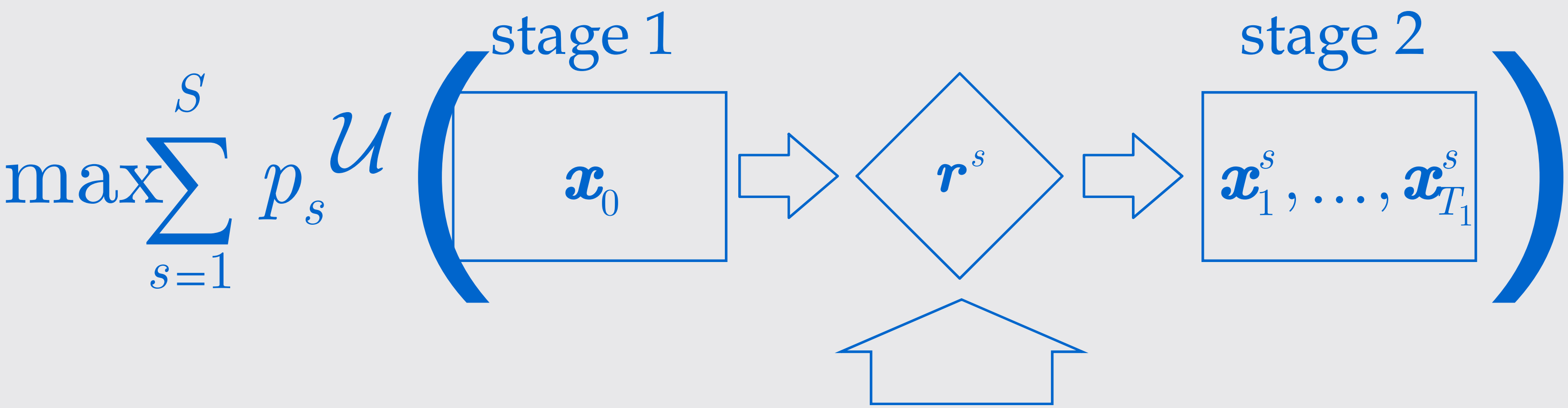
Ipotesi per risolvere un problema deterministico

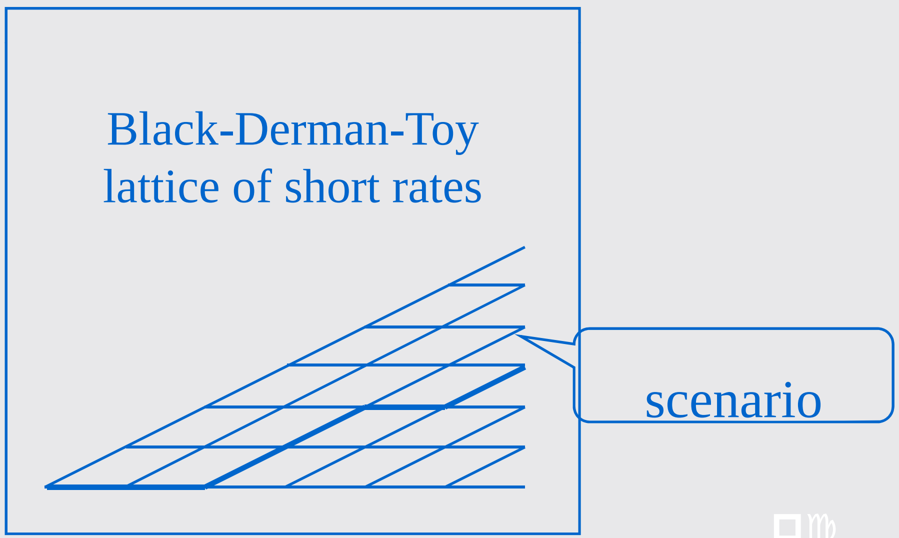
- Ogni informazione futura deve essere conosciuta.
- Tutti i dati devono essere noti quando si risolve il problema.
- Nessun dato può essere modificato, qualora ciò accadesse si deve reimpostare il problema con i nuovi dati.

Alcuni problemi dove compare l'incertezza

- **Trasporti** (domanda)
- **Produzione di energia elettrica** (domanda, condizioni meteorologiche, prezzo dell'energia)
- **Gestione di bacini d'acqua** (condizioni meteorologiche, intensità di irrigazione)
- **Finanza** (tassi di interesse, tassi di cambio, prezzi degli strumenti finanziari)
- **Ingegneria nucleare** (malfunzionamenti, probabilità di incidenti)
- **Ambiente** (probabilità di soddisfare regolamentazioni)
- **Logistica:**
  - **gestione di magazzini** (domanda di merce, disponibilità di risorse);
  - **Localizzazione di nuovi impianti** (bisogni futuri, prezzi)

Modello di gestione dinamica stocastica di portafoglio





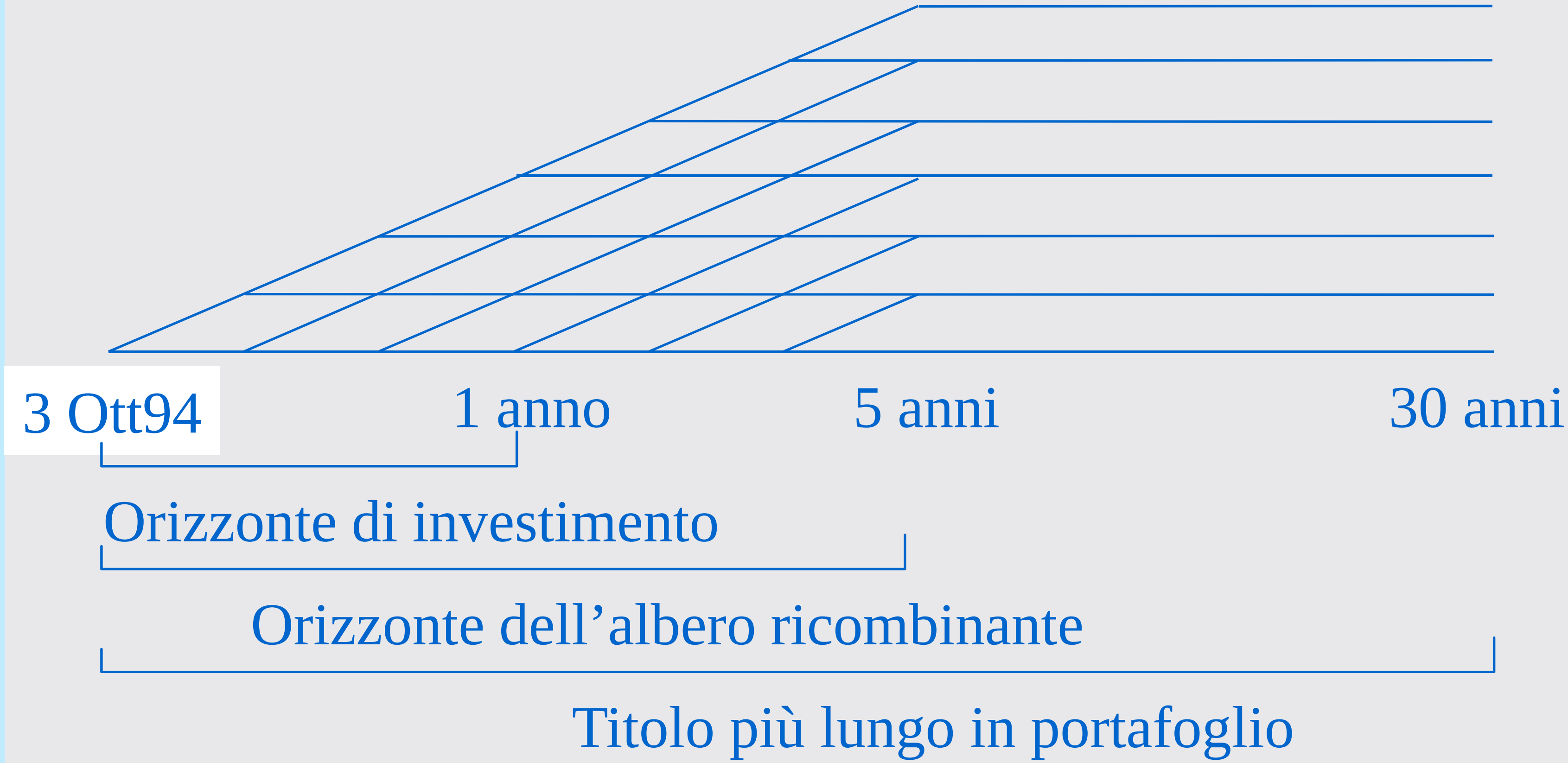
Sorgente di stocasticità:
Tassi di interesse

Composizione del portafoglio

Valore iniziale di mercato del portafoglio: 10484.55

Duration iniziale del portafoglio: 36407.7

Modello di evoluzione dei tassi di interesse di Black-Derman e Toy



Il prodotto OMoGaS

Si massimizzano i profitti della società di vendita del gas determinando:

• il numero ottimale di clienti per classe;
• i parametri ottimali del contratto di acquisto del gas da parte della società di vendita (volume annuo, invernale, capacità giornaliera massima);
• i prezzi per clienti industriali e gli sconti per clienti sensibili.

Sorgente di stocasticità: la temperatura

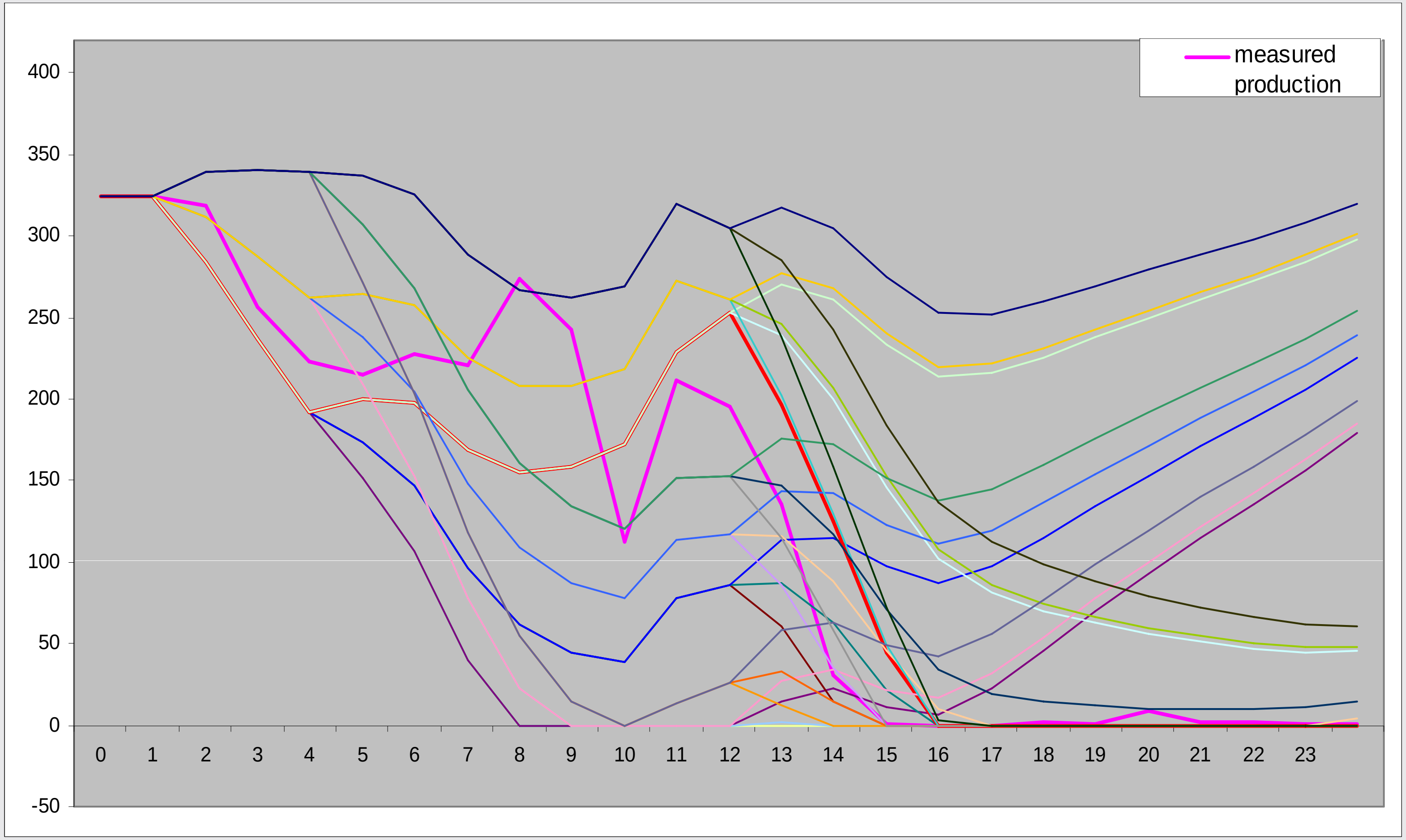
Generazione di energia tramite impianti idro-elettrici ed eolici

Si massimizzano i profitti di una società di produzione di energia tramite la gestione integrata di impianti idro-elettrici ed eolici determinando:

• la quantità di energia da produrre in ogni ora nell'arco di una giornata (problema dello unit committment).

Sorgente principale di stocasticità: l'intensità del vento
Sorgente secondaria di stocasticità: gli apporti d'acqua nei bacini.

Scenari di energia prodotta dal vento



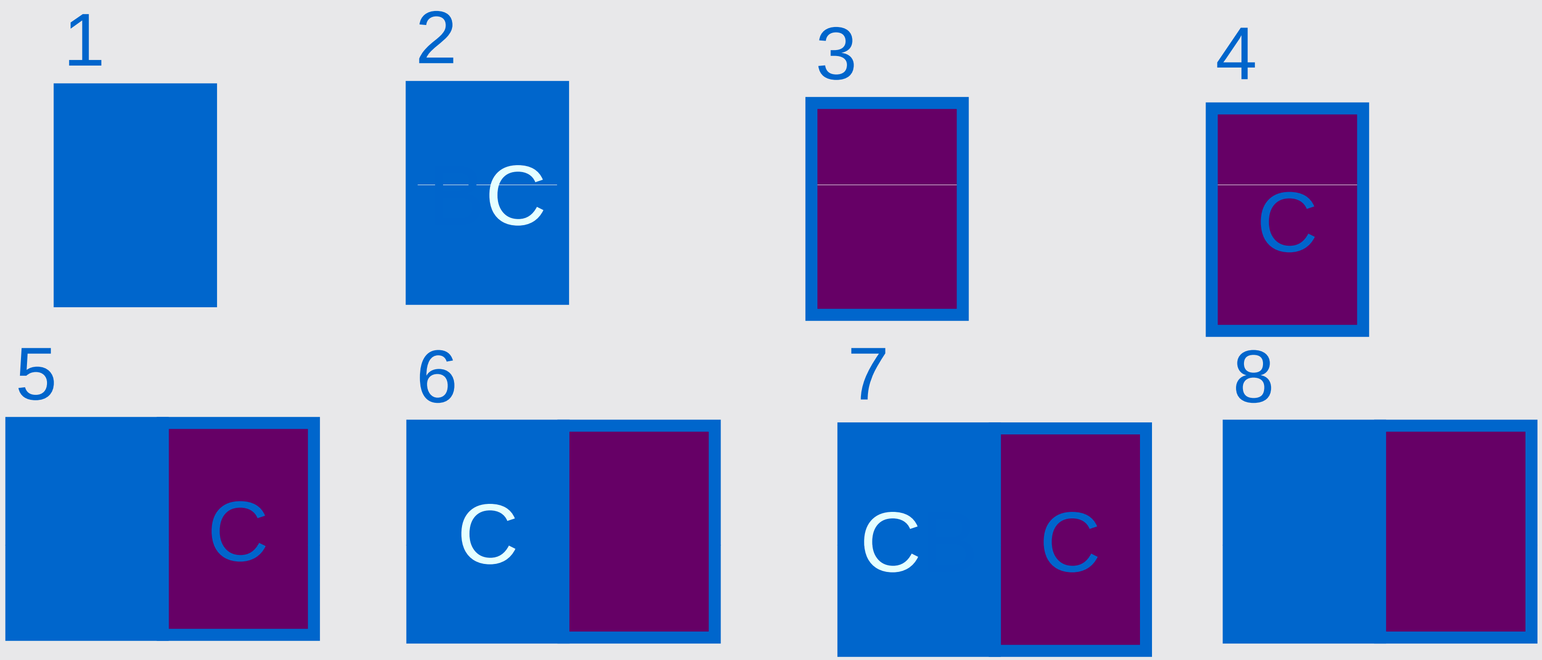
Un piccolo esempio

- Si posseggono due lotti di terreno e si deve decidere se costruire un impianto o no.
- Prima di costruire un impianto su di un lotto di terreno è necessario predisporre alcune infrastrutture (acqua, elettricità, strade).
- In ogni lotto si può costruire un impianto che produce una unità di prodotto che si può vendere ad un prezzo ***p***.
- Si può decidere di costruire l'impianto prima che il prezzo ***p*** sia conosciuto o dopo. Se si inizia la costruzione dopo che ***p*** sia noto, devono esserci già le infrastrutture e i costi di costruzione aumentano del 10%.
- Non vi è tempo sufficiente per predisporre il terreno e costruire l'impianto dopo che sia conosciuto ***p***.

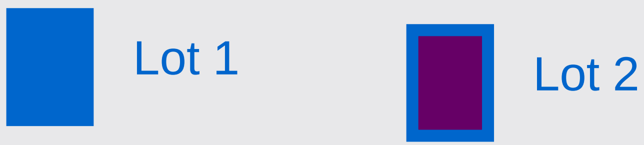
Alcuni costi associati alle infrastrutture ed alla costruzione dell'impianto

	Costruzione infrastrutture	Costruzione impianto	Costruzione impianto in tempo successivo
Lotto 1	600	200	220
Lotto 2	100	600	660

Tutte le possibili decisioni



9 = non faccio nulla



C=costruisco

Analisi per scenari

- Un modo per risolvere problemi di questo tipo è compiere un’analisi per scenari, ossia una simulazione, nel nostro caso prevedendo possibili valori per il prezzo ***p***:

  analisi degli scenari.

- L’idea è di costruire o campionare possibili valori futuri e risolvere il problema in corrispondenza di tali valori.
- Dopo aver ottenuto possibili decisioni in questo modo si sceglie la migliore o si cerca di trovare una buona combinazione delle decisioni.

Qual è la decisione migliore se si assume di conoscere ***p*** ?

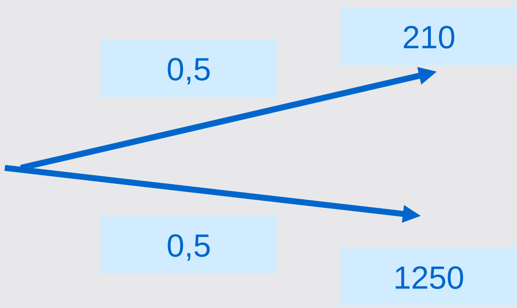
Nel nostro caso vi sono solo tre possibili scenari

Intervallo per p	Quante decisioni?	
$p < 700$	9	nulla
$700 \leq p < 800$	4	C
$p \geq 800$	7	C C

Gli scenari costruiti o campionati sono le sole possibili alternative.
In questa situazione non è mai ottimo ritardare la costruzione. Gli scenari sono la realizzazione di ***p***, ossia sono noti con certezza, quindi non vi è ragione di pagare il 10% di extra.

Utilizzo del valore atteso di *p*

- Una procedura comune per determinare la soluzione di un problema stocastico è utilizzare il valore atteso di tutte le variabili aleatorie.
- Si assume che il prezzo *p* possa essere 210 o 1250, ognuno con probabilità 0,5.



Utilizzo del valore atteso di *p*

- Il valore atteso (media) del prezzo è 730.
- In questo caso la soluzione ottimale è la decisione 4 con un profitto di $-700 + 730 = 30$.

Tale valore si dice **soluzione del valore atteso** (expected value solution, EVS).

- Si può anche utilizzare la EVS e testarla tenendo conto delle condizioni future.

  In questo caso si ha:

$$-700 + 0{,}5 \times 210 + 0{,}5 \times 1250 = 30$$

- Non è sempre vero che in generale che il valore atteso ottenuto utilizzando l'expected value solution eguaglia il valore ottenuto utilizzando il valore atteso dei parametri, nel nostro caso il valore atteso di ***p***.
- **Possiamo provare a calcolare il valore atteso del profitto per ogni scenario possibile.**

Massimizzazione del valore atteso della funzione obiettivo

- Si determina il **valore atteso del profitto** nel seguente modo:

(probabilità del prezzo p_1) $\times$ (unità prodotte al prezzo p_1) +
+ (probabilità del prezzo p_2) $\times$ (unità prodotte al prezzo p_2) +
– costi di sviluppo del terreno – costi per costruire l'impianto =
= **valore atteso del profitto**

- Caso della decisione 7:

$$0{,}5 \times 2 \times 210 + 0{,}5 \times 2 \times 1250 - 1500 = -40$$

Profitti attesi delle nove decisioni

Probabilità		0,5	0,5	
Decisione	Investi-mento	Entrata se $p = 210$	Entrata se $p = 1250$	Profitto atteso
1	-600	0	1030	-85
2	-800	210	1250	-70
3	-100	0	590	195*
4	-700	210	1250	30
5	-1300	210	2280	-55
6	-900	210	1840	125
7	-1500	420	2500	-40
8	-700	0	1620	110
9	0	0	0	0

Qualche commento

- La soluzione ottimale è sviluppare il lotto 2 ed attendere di vedere quale prezzo si ottiene.
- Se il prezzo sarà basso, non si deve fare nulla, se il prezzo sarà alto, si costruisce l'impianto nel lotto 2.
- La soluzione che massimizza il valore atteso della funzione obiettivo è detta **soluzione stocastica**.
- Si osservi che altre due soluzioni (la 6 e la 8) sono migliori rispetto alla EVS (la 4).
- Tutte tre queste soluzioni sono soluzioni con opzioni interne, ossia esse suppongono di sviluppare i due lotti pensando che vi saranno prezzi alti dopo. Ovviamente rimane la possibilità che l'investimento sia completamente perduto.

Modelli di ottimizzazione stocastica

$$\min \quad f(x, Y)$$
$$s.t. \quad g(x, Y) \leq 0$$
$$x \in D$$

dove $f : R^n \times R^s \to R$, funzione obiettivo

$D \subseteq R^n$, $D \neq \text{O}$, vincoli determinis tici

$Y \in R^s$, variabile aleatoria su (Ω, F, P)

$\text{g} : R^n \times R^s \to R^m$, vincoli stocastici

Programmazione stocastica lineare

$$\text{Min} \quad c(\omega)x$$

$$A(\omega)x \geq b(\omega)$$

$$x \in \Re^n_+$$

Programmazione stocastica ricorsiva a due stadi

- Frequentemente l'approccio seguito per modellizzare un problema stocastico coinvolge una scomposizione in almeno due stadi decisionali.
- Si deve fissare la prima decisione e dopo che i parametri incerti siano conosciuti si prende la seconda decisione.
- Certe decisioni devono essere prese al presente nonostante l'incertezza, dopo che l'incertezza sarà risolta si potranno assumere azioni correttive.

Variabili decisionali

- Le decisioni del primo stadio sono rappresentate dal vettore x mentre le decisioni del secondo stadio dal vettore y oppure $y(\omega, x)$

.

La successione degli eventi e delle decisioni è sintetizzata come segue:

$$x \rightarrow \xi(\omega) \rightarrow y(\omega, x)$$

Programmazione stocastica lineare a due stadi con ricorso

Min $\boxed{c^{T} x + E_{\xi}[\min \ q(\omega)^{T} y(\omega)]}$

Soggetto ai vincoli

$$\begin{aligned} &Ax = b, \\ &T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega) \\ &x \geq 0, y(\omega) \geq 0. \end{aligned}$$

$x \in \Re^{n_1}$	Decisioni del primo stadio
$c \in \Re^{n_1}$	Vettore fissato nel primo stadio
$\omega \in \Omega$	Evento casuale del secondo stadio,
$q(\omega) \in \Re^{n_2}$	Funzione costo del secondo stadio
$y(\omega) \in \Re^{n_2}$	Decisioni del secondo stadio
$A \in \Re^{m_1 \times n_1}$	Matrice fissata nel primo stadio
$T(\omega) \in \Re^{m_2 \times n_1}$	Matrice delle tecnologie
$W(\omega) \in \Re^{m_2 \times n_2}$	Matrice del ricorso
$h(\omega) \in \Re^{m_2}$	Vettore assegnato nel secondo stadio

Approcci non stocastici

- Ottimizzazione robusta (worst-case models)
- Modello del valore atteso
- Modello con vincoli probabilistici (Probabilistic chance constrained, Charnes, Cooper and Symonds, 1958)
- Modello a penalizzazione per la violazione dei vincoli

Conclusioni

- VANTAGGI: La programmazione stocastica

utilizza modelli probabilistici per l'incertezza:

1. ricchezza della teoria della probabilità
2. collegamento a dati reali tramite la statistica
3. linguaggio comune con altre aree della scienza

- SVANTAGGI:

1. Alcune difficoltà teoriche
2. Complessità computazionale

Bibliografia

- D-B-M, “Postoptimality for scenario based financial planning models with an application to bond portfolio Management” in World Wide Asset and Liability Modeling (W. Ziemba and J. Mulvey eds.), Cambridge University Press, 263-285, 1998.
- D-B-M, "Sensitivity of bond portfolio with respect to random movements in yield curve: a simulation study”, Annals of Operations Research, 99, 267-286, 2000.
- D-B,“From data to model and back to data: a bond portfolio management problem”, European Journal of Operational Research, 134, n.2, 33-50, 2001.
- D-B-M, “Horizon and stages in applications of stochastic programming in finance”, apparirà in Annals of Operations Research,2006, 142-63-78M.

Bibliografia

- B-D-M “Bond portfolio management via stochastic programming”, apparirà in Handbook of Asset and Liability Management (S.A. Zenios e W.T. Ziemba eds) , Ch.7, 305-336, 2006.
- M-V-A-B-I "A two-stage stochastic optimization model for a gas sale retailer”, sotto referee su Kybernetika, 2008, 2, 277-296.
- M-A-B-V-I-G “Un modello stocastico per la vendita al dettaglio di gas”, in Scienza delle decisioni in Italia: applicazioni della ricerca operativa a problemi aziendali (Felici, Schiomachen eds), 2008, 105-116.
- M-V-A-B-G-I "A stochastic optimization model for a gas sale company”, The IMA Journal of management Mathematics, 2009.