Summer School
Incontriamo la Matematica e la Fisica nelle Applicazioni
San Pellegrino Terme (Bergamo) – 7/8/9 settembre 2009

Le variazioni di una grandezza: introduzione alla derivata

Luigi Tomasi
Liceo Scientifico “P. Paleocapa” Rovigo - ANIMat
luigi.tomasi@unife.it

Alcune domande introduttive…

- Che cos'è la velocità?
- Come facciamo a descrivere la variazione di una grandezza?
- Come facciamo a sapere se siamo vicini ad un massimo?
- Che cos'è veramente la tangente ad una curva in un suo punto?

Un titolo di giornale

La Repubblica del 19 agosto 2009, pag. 24:

"Trasporto aereo, rallenta il calo dei passeggeri.

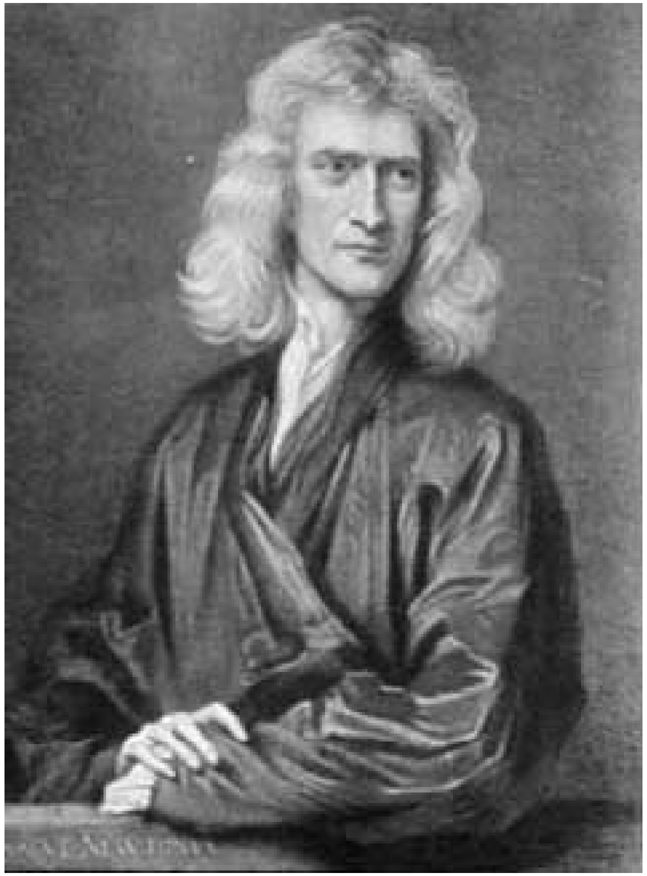
A giugno flessione del 7,1%. In ripresa i viaggi tra gli Usa e l'Europa"

Cosa significa "rallenta il calo dei passeggeri"?

Descrivere le variazioni di una grandezza

- La derivata è stata inventata per descrivere la rapidità (la velocità…) con cui varia una data grandezza nel tempo (o più in generale rispetto a un’altra variabile).
- Le origini del concetto sono in fisica, in meccanica (il problema di definire la velocità), e in geometria (il problema dei massimi e dei minimi e della retta tangente).
- L’idea di derivata –come molti dei concetti della matematica- ha avuto diversi precursori, ma coloro che hanno inventato questo concetto sono stati due giganti della scienza: Newton e Leibniz.

I fondatori del calcolo differenziale: Newton e Leibniz



Isaac Newton (1642 - 1727)

Gottfried W. Leibniz (1646 - 1716)

Modelli per descrivere le variazioni di una grandezza

- Una grandezza y (per esempio la temperatura, la posizione di un corpo in movimento, il valore di un titolo in borsa,…) varia al variare di un’altra grandezza x (per esempio il tempo); è necessario analizzare, comprendere e descrivere i modelli fondamentali di variazione (sono delle funzioni):
- i modelli lineari $y=a+bx$
- i modelli potenza $y=a\,x^b$
- i modelli esponenziali $y=a\,b^x$

Tutto ciò costituisce una competenza fondamentale per tutti gli studenti (e forse anche per i cittadini).

Variazioni a passo costante

Una variazione può essere descritta in modo discreto, con incrementi finiti

- Aumenti (e diminuzioni) in percentuale (cosa significa aumento del 100%? Cosa significa diminuzione del 50%? Perché è assurdo parlare di diminuzione del 150%,?)
- Incrementi a passo costante
- Vediamo egli incrementi della x e studiamo i conseguenti incrementi della y
- Esempi con un foglio elettronico

Incrementi finiti

- Se esistessero solo le rette, probabilmente la derivata non sarebbe stata inventata …
- Tra tutte le funzioni elementari le funzioni lineari occupano un ruolo centrale, perché in un certo senso costituiscono il modello di riferimento: quando ci occupiamo della variazione di una grandezza rispetto ad un’altra la prima cosa che ci chiediamo è se la variazione è di tipo lineare oppure no.
- Che cos’è il Δx?
- Che cos’è il Δy?

Pendenza media di una funzione

- **Supponiamo di conoscere di una funzione *f* definita su un intervallo *I* i valori in due punti distinti x_1 e x_2, quindi i numeri $f(x_1)$ ed $f(x_2)$.**

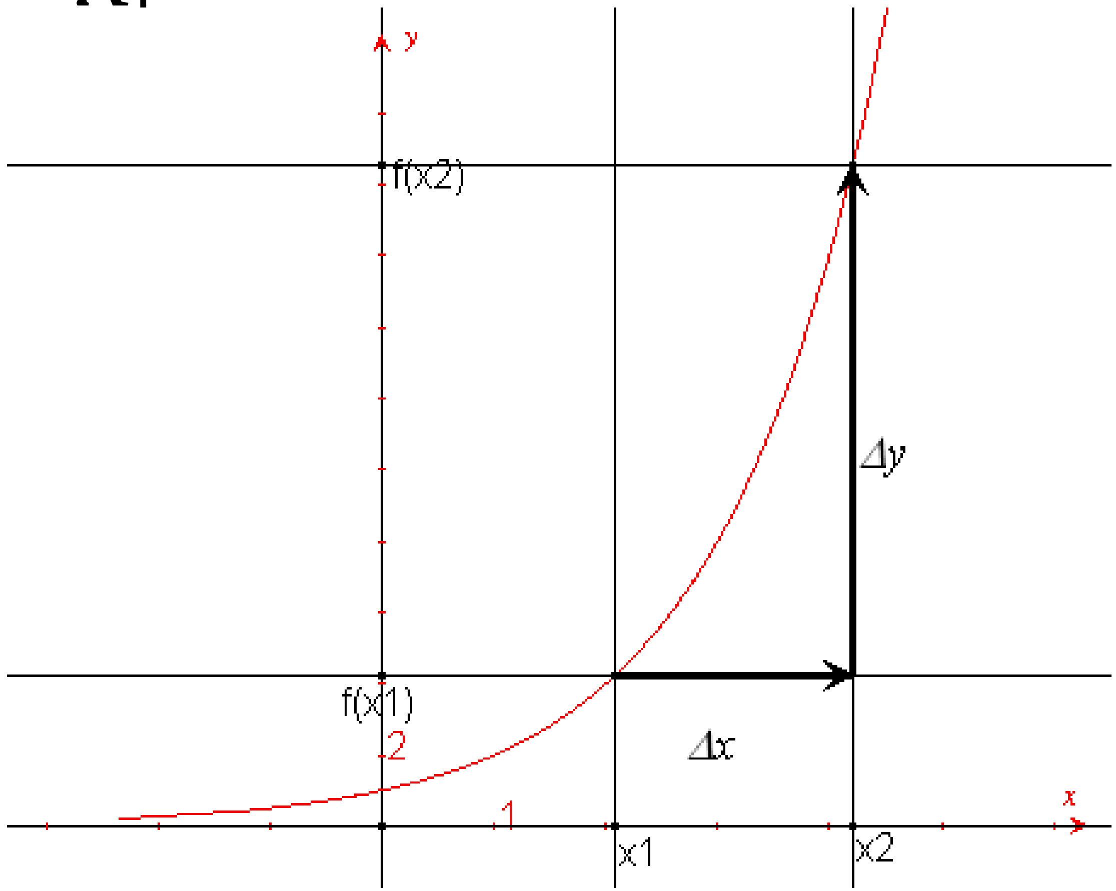
  La pendenza media della funzione *f* nell'intervallo è per definizione il rapporto tra l'incremento verticale e l'incremento orizzontale (cui corrisponde):

$$\text{pendenza media} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Pendenza media di una funzione

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Esempi con Cabri ….



Ogni funzione cresce a modo suo

- Esaminiamo poi la pendenza media, in vari punti delle funzioni x^2, x^3 , 2^x… Più esattamente determiniamo gli incrementi finiti al crescere della variabile x con incremento costanti (vedi esempi con Excel).
- Una funzione molto interessante da esaminare è la radice quadrata ⌦x, ; esaminiamo le sue variazioni con passo costante.

  - Esempi con Excel …. (x^2, x^3 , 2^x)
  - Esempi con Cabri

Ma non ci basta sapere che cos'è la variazione media…

- Oppure una variazione può (o deve) essere descritta in modo continuo…
- La multa e la storiella raccontata da Richard P. Feynman (*La Fisica di Feynman*, vol. I):

  "Una signora viene fermata da un vigile per eccesso di velocità.
  - Signora: "ma in media andavo a 40 km/h"…
  - Vigile: "Lo racconti al giudice!"

- Un multa certamente non viene data sulla velocità media!

Verso la variazione puntuale (o istantanea) di una funzione

- Il concetto di derivata è quello di pendenza puntuale di una funzione, e una funzione è derivabile in un punto se è possibile, localmente confondere il suo grafico con quello di una funzione lineare.
- Esempio. Consideriamo la funzione e^x nel punto x=0, dove come forse sapete, la pendenza vale 1. La funzione lineare per il punto (0,1) è la y=1+x.

Esempio *con Derive* (oppure con altri software) sulla funzione f(x):= e^x (zoom successivi).

Verso la variazione puntuale (o istantanea) di una funzione

Arriviamo quindi alle definizioni fondamentali in cui il limite deve *esistere* ed essere *finito.*

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$m = f'(x_0) \qquad\qquad m = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Verso la derivata di una funzione

- Incrementi a “passo” costante: pendenza media di una curva

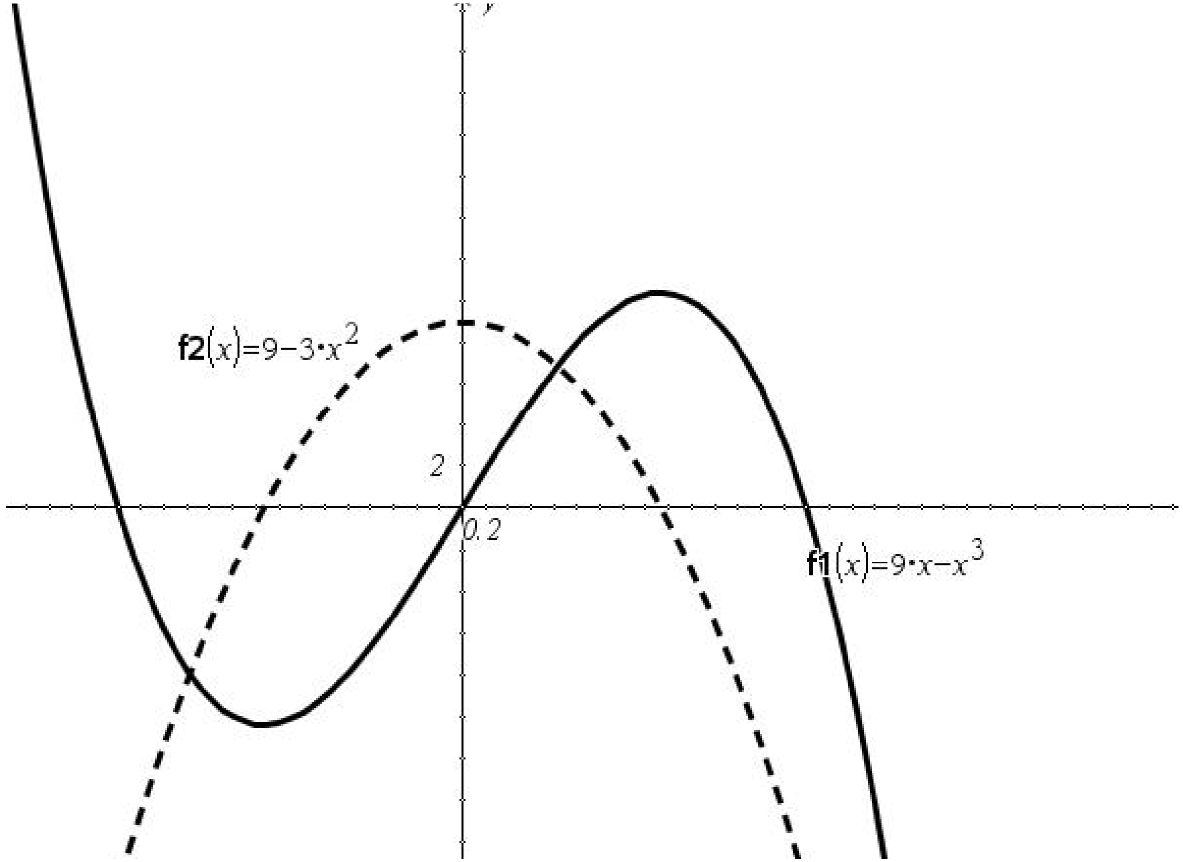
Introduzione alla derivata con *Cabri*

- Rapporto incrementale
- Da secante a tangente
- Una macro per ottenere la tangente in un punto del grafico
- Funzione derivata

La derivata diventa una nuova funzione

Se una funzione è derivabile in ogni punto di un intervallo *I*, possiamo definire una nuova funzione

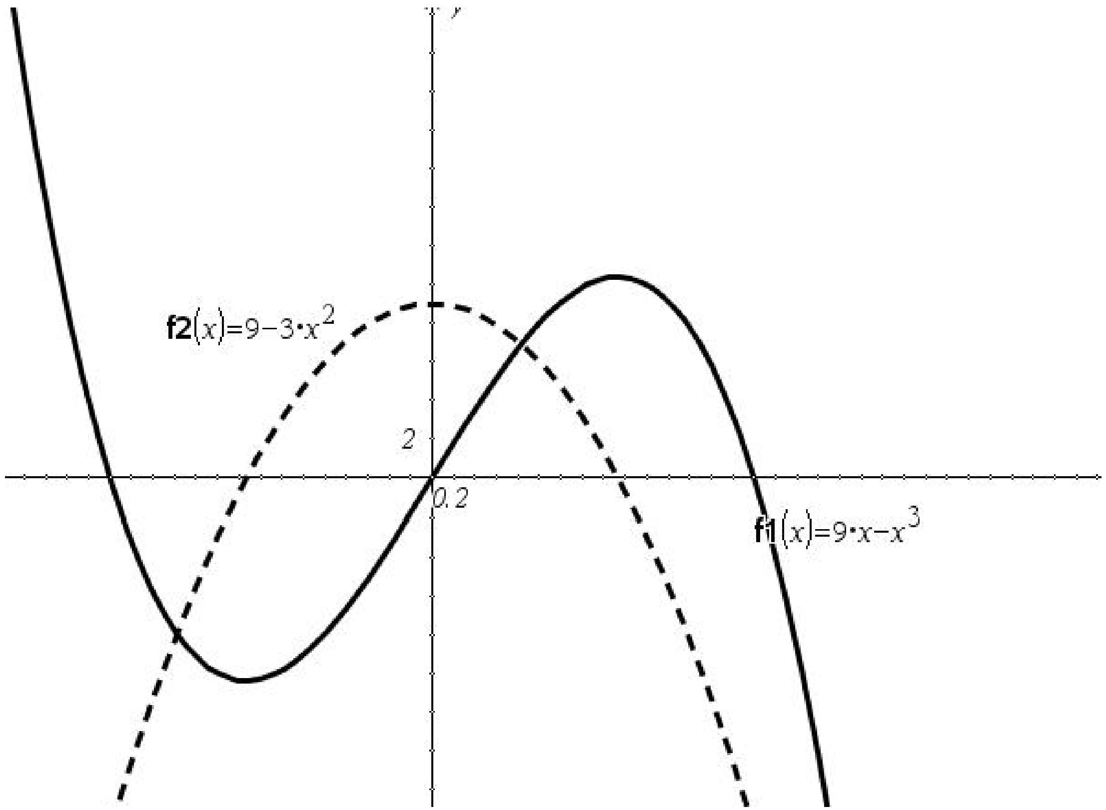
$$x \to f'(x)$$

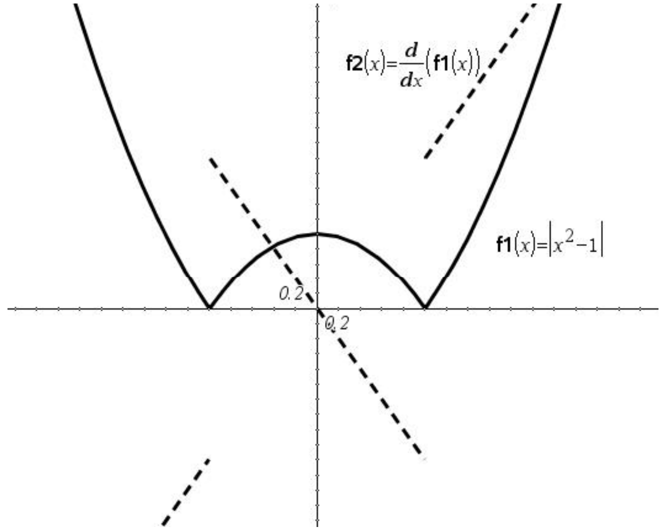


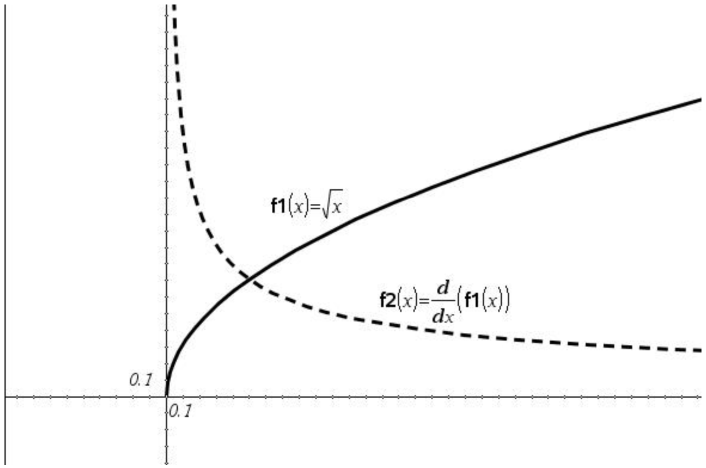
Variazioni di una funzione e derivata

- La funzione derivata
- Derivate di funzioni elementari (es. derivata di sinx); la derivata come funzione
- Derivate di funzioni elementari (es. derivata di e^x); la derivata come funzione
- Derivate di funzioni elementari (es. derivata di logx); la derivata come funzione
- Derivata della funzione inversa
- Differenziale di una funzione

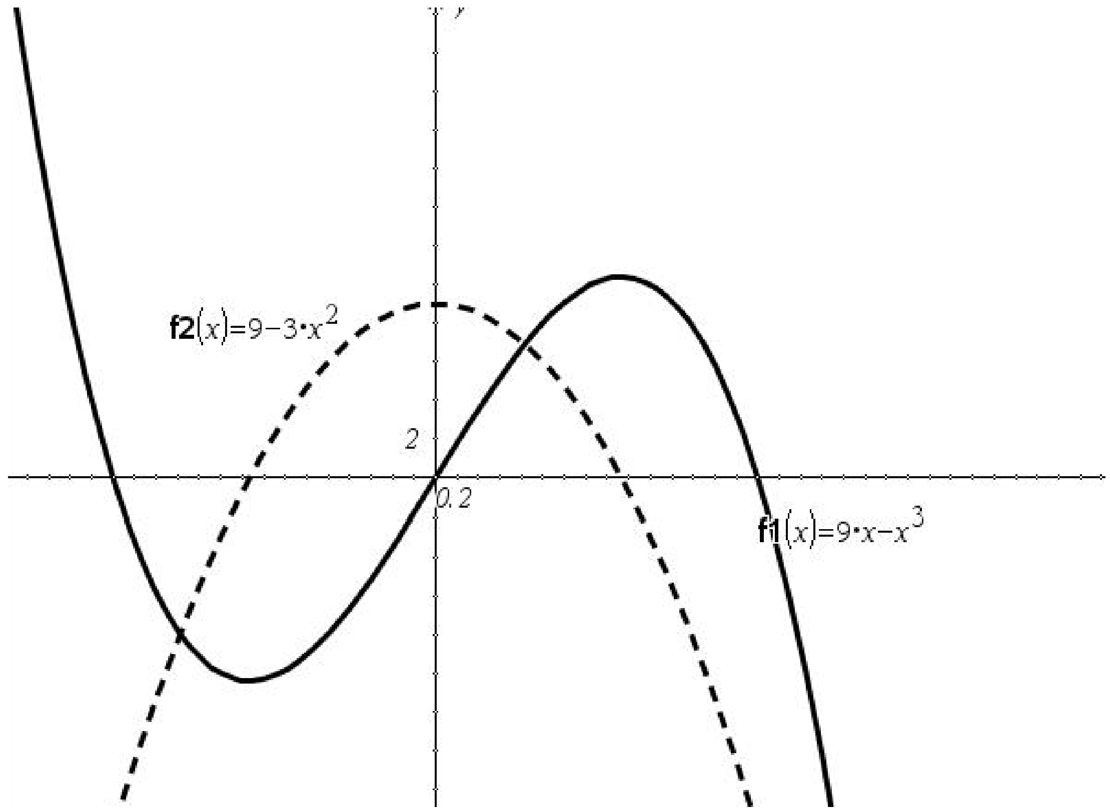
Il legame funzionale tra i grafici di *f*(*x*) ed *f'*(*x*)







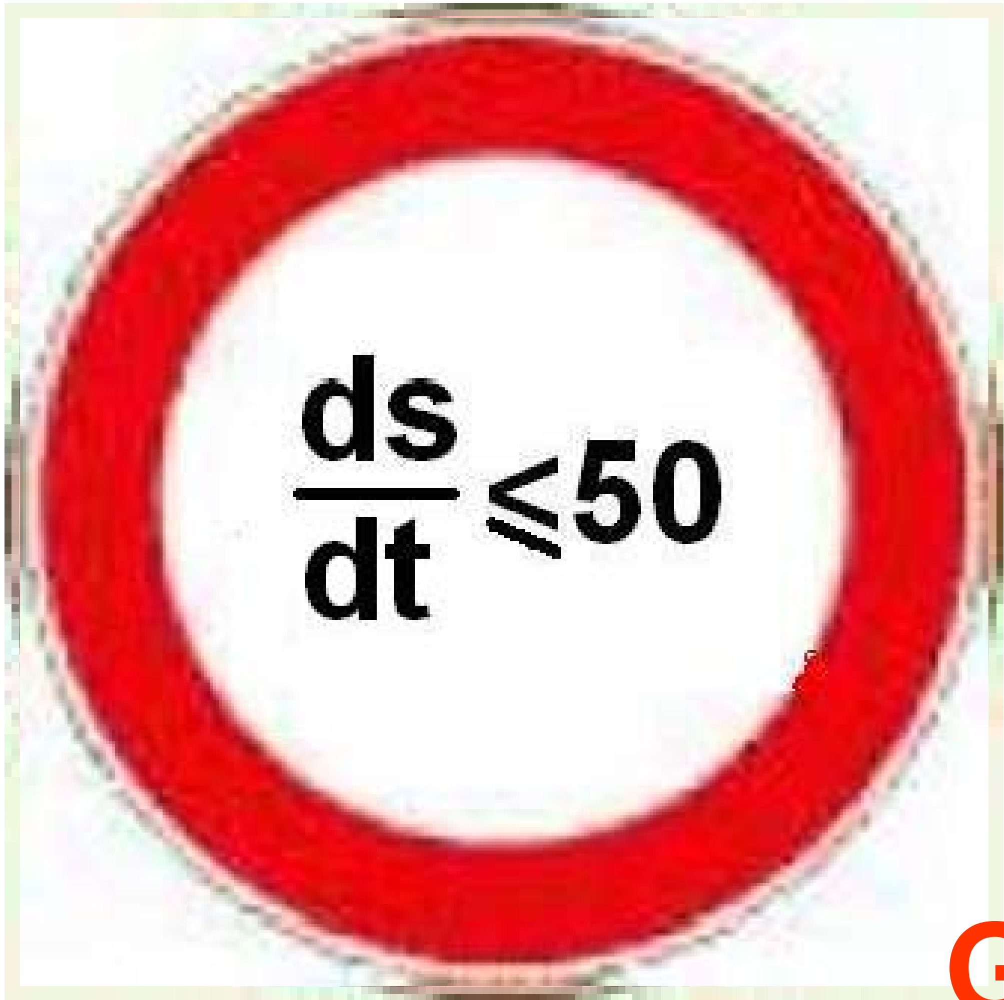
Massimi, minimi, crescenza e decrescenza di una funzione *f*(*x*)



Conclusioni

- Gli esempi presentati hanno proposto un approccio dinamico e interattivo alla derivata di una funzione
- Le nuove tecnologie e le potenzialità del software, rendono questi strumenti molto utili e versatili per l'insegnamento della matematica, in particolare per affrontare il tema della derivata nei suoi vari aspetti.
- Le nuove caratteristiche implementate nei software consentono di proporre attività di scoperta di proprietà e di produzione di congetture nello studio delle funzioni e dei loto grafici.
- Queste caratteristiche delle nuove tecnologie permettono un insegnamento e apprendimento maggiormente fondati sugli aspetti intuitivi e operativi dei concetti.

Un cartello stradale…



Grazie!